



MINISTERUL EDUCAȚIEI



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ

“TEHNICI MATEMATICE” - ediția a XVIII-a

Etapa județeană 10.02.2023

Clasa a X-a – Matematică *M_șt-nat*

Subiectul I

a) Se dau numerele naturale $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2023} > 1$ cu $x_1 = x_2 = \dots = x_{2023}$ și $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{2023}$ distincte două câte două. Dacă $y_i \in \{1, 2, 3, \dots, 2023\}$, arătați că numărul

$a = x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_2} \cdot x_3^{y_3} \cdot \dots \cdot x_{2023}^{y_{2023}}$ este pătrat perfect.

b) Comparați numerele:

$$x = \sqrt[3]{64} + 2^{\sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{2} \sin^2 2x} \quad \text{și} \quad y = \sqrt[5]{-243} + 10^{3 \sin^4 x + 3 \cos^4 x - 2 \sin^6 x - 2 \cos^6 x}.$$

c) Arătați că: $1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-n} < 2$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul II

a) Să se arate că $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$.

b) Să se arate că numărul $q = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}}$ este irațional.

c) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația: $\frac{\sqrt[6]{x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}}}}{\sqrt[5]{x^3 \cdot \sqrt[4]{x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}}} = \sqrt{2}$.

Subiectul III

a) Arătați că: $Re(z) = \frac{a}{4} \left(\left| z + \frac{1}{a} \right|^2 - \left| \bar{z} - \frac{1}{a} \right|^2 \right)$, $(\forall) z \in \mathbb{C}$, $(\forall) a \in \mathbb{R}^*$.

b) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $2(6 + 9i)^2 - 3(1 + 8i)^2 = a + ib$.

c) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, demonstrați că:

$$2(6 + 9i)^n - 3(1 + 8i)^n = 3(7 + 4i)^n \Leftrightarrow (2 + i)^n + (2 - i)^n = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Fiecare subiect are 30 puncte

Se acord 10 puncte din oficiu.

Timp de lucru 120 minute.

Subiectele au fost selectate și propuse de:

prof. Pozinărea Simona

prof. Drăgan Elena