



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE” - ediția a XVIII-a

Etapa județeană 10.02.2023

Clasa a XII -a Matematică *M_{șt-nat}*

SUBIECTUL I

- 5p 1) Determinați suma primilor patru termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că primul termen este $b_1 = 3$ și rația este $q = 2$.
- 5p 2) Se consideră funcțiile $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = x^2 - 5x + 6$ și $g(x) = -2x + 4$. Calculați suma dintre abscisele punctelor de intersecție ale graficelor celor două funcții.
- 5p 3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x} = x - 3$.
- 5p 4) Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{100}\}$, acesta să fie număr natural.
- 5p 5) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, -3), B(-1, 4)$ și $C(4, 0)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC .
- 5p 6) Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $(\sin x + 2\cos x)^2 - 4 \sin x (\sin x + \cos x) = -3\sin^2 x$.

SUBIECTUL II

- 1) Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & -x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(x)) = 4 + x^2$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Demonstrați că $A(2023 - x) + A(2023 + x) = 2A(2023)$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Determinați numărul natural nenul n astfel încât
$$A(1) + A(2) + \dots + A(n) = nA(100).$$
- 2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă
$$x \circ y = xy - x - y + 2, \text{ unde } x \text{ și } y \text{ sunt numere reale.}$$
- 5p a) Arătați că $x \circ y = (x - 1)(y - 1) + 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $x \circ x \leq 17$.
- 5p c) Calculați $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2023^n$, pentru orice număr natural nenul n .

SUBIECTUL III

- 1) Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{-(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{6}$, pentru orice număr real x .
- 2) Se consideră funcțiile $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1-2 \ln x}{x^3}$ și $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, F(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.
- 5p a) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Calculați $\int_1^e f(x) dx$.
- 5p c) Arătați că $\int_e^{e^3} xF(x) dx = 4$.

Fiecare subiect are 30 puncte.
Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp de lucru 180 minute.

Subiectele au fost elaborate de:
Prof. Aron Roxana
Prof. Dicu Florentina