CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-ediția a XVIII-a
Etapa judeteană 10.02.2023
Clasa a XI –a, Matematică *M_tehnologic*
Barem de corectare și notare

Subiectul I **(30p)**

Fie matricea $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $\mathcal{M}$ mulțimea matricelor $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu elementele de pe diagonala secundară nule, iar suma elementelor de pe fiecare linie și fiecare coloană egală cu 0.

a) Să se calculeze $B+B^2+B^3+\cdots+B^{18}$.

b) Să se determine $A\in\mathcal{M}$ astfel incât $A^3=A$.

c) Să se arate că $det(A+B)<0,\ \forall\ A\in\mathcal{M}$.

Barem de corectare și notare

a) $B^2=I_3$ deci $B^3=B$ 3p

$B^{2k}=I_3$ și $B^{2k+1}=B,\ k\in\mathrm{N}$....................4p

$B+B^2+B^3+\cdots+B^{18}=B+I_3+B+\cdots.+I_3=9(B+I_3)$....................2p

$B+B^2+B^3+\cdots+B^{18}=9\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&9&0\\9&9&0\\0&0&18\end{pmatrix}$....................1p

b) Fie $A\in\mathcal{M}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}a&b&0\\c&0&d\\0&e&f\end{pmatrix}$ astfel încât $\begin{cases}a+b=0\\c+d=0\\e+f=0\end{cases}$ și $\begin{cases}a+c=0\\b+e=0\\d+f=0\end{cases}$ 2p

$\Rightarrow\begin{cases}a=e=d\\b=c=f=-a\end{cases}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}a&-a&0\\-a&0&a\\0&a&-a\end{pmatrix},a\in\mathbb{R}$....................3p

$A^3=\begin{pmatrix}3a^3&-3a^3&0\\-3a^3&0&3a^3\\0&3a^3&-3a^3\end{pmatrix}$. 2p

$A^3=A\Rightarrow 3a^3=a\Rightarrow a(3a^2-1)=0\Rightarrow a=0$ sau $a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 1p

$A=O_3$ sau $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ sau $A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$....................2p

c) $A+B=\begin{pmatrix}a&1-a&0\\1-a&0&a\\0&a&1-a\end{pmatrix}$....................1p

det $(A+B)=\begin{vmatrix}a&1-a&0\\1-a&0&a\\0&a&1-a\end{vmatrix}=-3a^2+3a-1$ 4p

$\Delta=-3<0,-3<0\ \Rightarrow -3a^2+3a-1<0\ ,\forall\ a\in\mathbb{R}$. 4p

Deci det $(A+B)<0,\ \forall\ A\in\mathcal{M}$....................1p

Subiectul II **(30p)**

Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^x,\ g(x)=2^{x+1}-2$.

a) Să se determine x astfel încât punctele $A(1,1),\ B(f(x),g(x)),\ C(g(x),f(x))$ să fie coliniare.

b) Să se afle mulțimea punctelor de acumulare din $\overline{\mathbb{R}}$ pentru $A=\{x\in\mathbb{R}|\ f(x)+\ g(x)<1\}$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ și $\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)-f(x)}{x-1}$.

Barem de corectare și notare

a) A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^x & 2^{x+1}-2 & 1 \\ 2^{x+1}-2 & 2^x & 1 \end{vmatrix} = 0$............3p

$\Leftrightarrow (2-2^x)(3\cdot 2^x-4)=0$ 5p

$\Leftrightarrow x=1$ sau $x=\log_2\frac{4}{3}$ 2p

b) $x\in A \Leftrightarrow 2^x+2^{x+1}-2<1$ 2p

$\Leftrightarrow 2^x<1$ 3p

$\Leftrightarrow\ x\in(-\infty,0)$ 2p

$A^{'}=[-\infty,0]$ 3p

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=\infty$ 3p

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-2$............3p

$\lim\limits_{x\to1}\frac{g(x)-f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2^{x+1}-2-2^x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2^x-2}{x-1}$ 2p

$\lim\limits_{x\to1}\frac{2^x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{2(2^{x-1}-1)}{x-1}=2\ln2$ 2p

Subiectul III **(30p)**

Se consideră funcția $f\colon \mathrm{D}\to\mathrm{R}$, $f(x)=\frac{x^3-ax^2-8x}{x^2-2x+a+2}$, $a\in\mathrm{R}$.

a) Pentru $a=-2$ calculați $\lim\limits_{x\to2} f(x)$.

b) Aflați valoarea numărului real a pentru care dreapta de ecuație $y=x+3$ este asimptotă oblică la graficul funcției spre $+\infty$.

c) Pentru $a\geq-1$, determinați numărul asimptotelor verticale ale funcției *f*.

Barem de corectare și notare

a) Pentru $a=-2$ avem $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3+2x^2-8x}{x^2-2x}$, nedeterminare $\left(\frac{0}{0}\right)$............2p

$x^3+2x^2-8x=x(x+4)(x-2)$ 2p

$\lim\limits_{x\to2} f(x)=\lim\limits_{x\to2}\frac{x(x+4)(x-2)}{x(x-2)}$............4p

$\lim\limits_{x\to2}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x(x+4)}{x}=\frac{2\cdot6}{2}=6$............2p

b) Din $y=x+3$ avem $m=1$ și $n=1$ (1)............2p

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-ax^2-8x}{x(x^2-2x+a+2)}=1$ (verifică (1))............2p

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-ax^2-8x}{x^2-2x+a+2}-x\right)$............1p

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-ax^2-8x-x^3+2x^2-ax-2x}{x^2-2x+a+2}=-a+2$............3p

$-a+2=3$ (conform (1)) 1p

$\Leftrightarrow a=-1$ 1p

c) $x^2-2x+a+2=0$, $\Delta=(-2)^2-4(a+2)\Leftrightarrow\Delta=-4a-4$............1p

Punem condiția ca f să admită asimptote verticale: $\Delta\geq0 \Leftrightarrow -4a-4\geq0\Leftrightarrow a\leq-1$ 2p

și cum $a\geq-1$ (din ipoteză) $\Longrightarrow$ a $=-1$ 1p

Pentru $a=-1$, avem $f(x)=\frac{x^3+x^2-8x}{x^2-2x+1}=\frac{x^3+x^2-8x}{(x-1)^2}$, $\mathrm{D}=\mathbb{R}\backslash\{1\}$............2p

$ls(1)=-\infty$ și $ld(1)=-\infty \Longrightarrow$ pentru $a=-1$, f admite **o singură** asimptotă verticală, dreapta de ecuație $x=1$............4p