

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-editia a XVIII-a

Etapa judeteană 10.02.2023

Clasa a XII -a M_Științe ale naturii

SUBIECTUL I

1)	$b_2 = b_1q = 6, b_3 = b_1q^2 = 12, b_4 = b_1q^3 = 24$ $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 45$	3p 2p
2)	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = -2x + 4$ $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$	2p 3p
3)	$4x = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$ $x_1 = 1$, nu convine, și $x_2 = 9$, care convine	3p 2p
4)	Mulțimea A are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 10 numere naturale, deci 10 cazuri favorabile $p = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$	2p 2p 1p
5)	Punctul $M\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ este mijlocul laturii BC Ecuația medianei din A este: $-10x + 7y + 1 = 0$	2p 3p
6)	$\sin^2 x + 4\cos^2 x + 4\sin x \cos x - 4\sin^2 x - 4\sin x \cos x = 4\cos^2 x - 3\sin^2 x$ $\Rightarrow 4\cos^2 x - 3\sin^2 x = -3\sin^2 x$ $\Rightarrow \cos^2 x = 0$, dar $x \in (0, \pi)$, deci $x = \frac{\pi}{2}$.	3p 2p

SUBIECTUL II

1)	a) $\det A(x) = \begin{vmatrix} 2 & -x \\ x & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-x)x = 4 + x^2$	3p 2p
	b) $A(2023 - x) + A(2023 + x) = \begin{pmatrix} 2 & x - 2023 \\ 2023 - x & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2023 - x \\ 2023 + x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4046 \\ 4046 & 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & -2023 \\ 2023 & 2 \end{pmatrix} = 2A(2023)$	3p 2p
	c) $A(1) + A(2) + \dots + A(n) = \begin{pmatrix} 2n & -\frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} & 2n \end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix} 2n & -\frac{n(n+1)}{2} \\ \frac{n(n+1)}{2} & 2n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 2 & -100 \\ 100 & 2 \end{pmatrix}$. Obținem $2n = 2n$; $\frac{n(n+1)}{2} = 100n, n \in N^*$. Deci $\frac{(n+1)}{2} = 100 \Rightarrow n = 199$	3p 2p
2)	a) $x \circ y = xy - x - y + 2 = xy - x - y + 1 + 1 = x(y - 1) - (y - 1) + 1$ Deci $x \circ y = (x - 1)(y - 1) + 1$	3p 2p

	<p>b) $x \circ x = (x - 1)^2 + 1 \Rightarrow (x - 1)^2 \leq 16$, care are soluția $x \in [-3,5]$</p>	3p 2p
	<p>c) Se arată că $1 \circ x = 1, \forall x \in R$ Deci $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2023^n = 1 \circ (2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2023^n) = 1$</p>	2p 3p
SUBIECTUL III		
1)	<p>a) f este funcție derivabilă pe $R, f'(x) = \frac{1(x^2+3)-(x-1)2x}{(x^2+3)^2}$ $= \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-(x+1)(x-3)}{(x^2 + 3)^2}$</p>	3p 2p
	<p>b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} = 0$ Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f</p>	3p 2p
	<p>c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 3$ Obținem $f'(x) \geq 0$ pentru $x \in [-1,3]$, deci f crescătoare pentru $x \in [-1,3]$, iar $f'(x) \leq 0$ pentru $x \in (-\infty, -1]$ și pentru $x \in [3, +\infty)$, deci pe $(-\infty, -1]$ funcția f este descrescătoare, iar pe $[3, +\infty)$ funcția f este descrescătoare. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2+3} = 0$, iar $f(-1) = -\frac{1}{2}$ și $f(3) = \frac{1}{6}$ Deci $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{6}$, pentru orice număr real x.</p>	3p 2p
2)	<p>a) F este funcție derivabilă pe $(0, +\infty)$, iar $F'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{\frac{1}{x}x^2 - \ln x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$ Deci $F'(x) = f(x), x \in (0, \infty) \Rightarrow F$ este primitiva lui f.</p>	1p 2p 2p
	<p>b) $\int_1^e f(x)dx = F(x) _1^e = \frac{\ln x}{x^2} _1^e =$ $= \frac{\ln e}{e^2} - \frac{\ln 1}{1^2} = \frac{1}{e^2}$</p>	3p 2p
	<p>c) $\int_e^{e^3} xF(x)dx = \int_e^{e^3} x \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_e^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx =$ $= \frac{\ln^2 x}{2} \Big _e^{e^3} = \frac{\ln^2 e^3}{2} - \frac{\ln^2 e}{2} = \frac{3^2}{2} - \frac{1}{2} = 4$</p>	2p 3p