CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-editia a XVIII-a
Etapa judeteană 10.02.2023
Clasa a IX -a Matematică *M_tehnologic*

Barem de corectare și notare

Subiectul I

a) Se dă $(a_n)_{n\geq 1}$o progresie aritmetică astfel încât $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{4046}=2023$.
Să se calculeze a_{2024}.

b) Să se rezolve ecuaţia $|x-1|+|x^2-1|=7(x^2-4)$, pentru $x\geq -1$.

c) Se dă $0<b<a$ cu $a^2+b^2=6ab$. Să se calculeze $\frac{a}{b}$.

Barem de corectare și notare:

a) (a_1+r)+(a_1+3r)+(a_1+5r) ... +$(a_1+4045r)$= 2023........2p

$2023a_1+r(1+3+5+\cdots+4045)=2023$........2p

$2023a_1+r\cdot 2023^2=2023$........2p

$a_1+2023r=1$........2p

$a_{2024}=1$........2p

b) $|x-1|+|x-1|\cdot|x+1|=7(x^2-4)$ 1p

$|x-1|\cdot(1+|x+1|)=7(x+2)(x-2)$........1p

Pentru $x\in[-1,\infty)$, $|x+1|=x+1$........1p

$|x-1|\cdot(1+x+1)=7(x+2)(x-2)\Leftrightarrow|x-1|\cdot(x+2)=7(x+2)(x-2)$........3p

$|x-1|=7(x-2)\,)\Leftrightarrow|x-1|=7x-14$ 2p

Cazul I $x\in[-1,1]\Longrightarrow -x+1=7x-14\Leftrightarrow x=\frac{15}{8}\notin[-1,1]$........1p

Cazul II $x\in(1,\infty)\Longrightarrow x-1=7x-14\Leftrightarrow x=\frac{13}{6}\in(1,\infty)$........1p

c) a > b $a,b\in(0,\infty)$, $\frac{a}{b}>1$, $\frac{a}{b}\in(1,\infty)$ 1p

$a^2-6ab+b^2=0\ \ /:b^2$........1p

$\frac{a^2}{b^2}-\frac{6ab}{b^2}+1=0$........1p

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-6\left(\frac{a}{b}\right)+1=0$........1p

$t=\frac{a}{b}\in(1,\infty)$........1p

$t^2-6t+1=0$........1p

$\Delta=36-4=32=>\ \sqrt{\Delta}=4\sqrt{2}$........1p

$t_{1,2}=\frac{6\pm4\sqrt{2}}{2}$........1p

$t=3\pm2\sqrt{2}\in(1,\infty)=>t=3+2\sqrt{2}$ 1p

$\frac{a}{b}=3+2\sqrt{2}$ 1p

Subiectul II (30p)

a) Fie $a,b>0$ și $M_a=\frac{a+b}{2}, M_g=\sqrt{a\cdot b}, M_P=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Demonstraţi că $M_g^2+M_p^2=2\cdot M_a^2$.

b) Să se arate că $\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$, $n\in\mathbf{N},\ n\geq 1$.

c) Determinaţi numărul natural nenul *n* astfel încât

$$\frac{1}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot9}+\frac{4}{9\cdot17}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{2^{2022}-1}{3\cdot(2^{2023}+1)}.$$

Barem de corectare și notare

a) $a\cdot b+\frac{a^2+b^2}{2}=2\cdot\frac{(a+b)^2}{4}\Leftrightarrow$........5p

$2\cdot a\cdot b+a^2+b^2=(a+b)^2$ (A)........5p

b) $\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1})=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{n+1}+1-2^n-1}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=$ 5p

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^n(2-1)}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$ 5p

c) Utilizând punctul b) obţinem

$\frac{1}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot9}+\frac{4}{9\cdot17}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)=$ 2p

$=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1})=$ 1p

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2^{n+1}-2}{3(2^{n+1}+1)}=\frac{2^n-1}{3(2^{n+1}+1)}\Leftrightarrow$ 2p

$\frac{2^n-1}{3(2^{n+1}+1)}=\frac{2^{2022}-1}{3(2^{2023}+1)}\Leftrightarrow$ 1p

$\frac{2^n-1}{2^{n+1}+1}=\frac{2^{2022}-1}{2^{2023}+1}\Leftrightarrow$ 1p

$\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}+1}=\frac{2^{2023}-2}{2^{2023}+1}\Leftrightarrow$ 2p

$n=2022$ 1p

Subiectul III (30p)

a) Se consideră paralelogramul *ABCD*. Demonstrați că pentru orice punct O din plan are loc relația $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

b) Fie *G* centrul de greutate al triunghiului *ABC* și *P* un punct oarecare în plan. Arătați că: $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PG}$.

c) Să se demonstreze că într-un trapez, punctul de intersecție al diagonalelor și mijloacele bazelor sunt trei puncte coliniare.

Barem de corectare și notare

a) $\begin{cases}\Delta OAB: \ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\ \Delta ODC: \ \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}-echivalenţi\end{cases}\Rightarrow$ 6p

$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\Leftrightarrow$ 3p

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ 1p

b) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OC}=$ 2p

$=3\cdot\overrightarrow{PO}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=$ 2p

$=3\cdot\overrightarrow{PO}+3\cdot\overrightarrow{OG}=$ 2p

$=3\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OG})$ 2p

$=3\cdot\overrightarrow{PG}$ 2p

c) În trapezul *ABCD*, cu bazele *AB* și *CD*, fie *E* mjlocul bazei *DC* și *F* mijlocul bazei *AB* iar $AC\cap BD=\{O\}$.

Vom arăta că punctele *E*,*O* și *F* sunt coliniare

$\overrightarrow{OE}=\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}}{2},\overrightarrow{OF}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$ 2p

Notăm $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=k\Rightarrow\overrightarrow{OA}=-k\cdot\overrightarrow{OC}$ *și* $\overrightarrow{OB}=-k\cdot\overrightarrow{OD}\Rightarrow$ 2p

$\Rightarrow\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(-k\cdot\overrightarrow{OC}-k\cdot\overrightarrow{OD})$ 2p

$\Rightarrow\overrightarrow{OF}=-\frac{k}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ 1p

$\Rightarrow\overrightarrow{OF}=-\frac{k}{2}\cdot2\overrightarrow{OE}$ 1p

$\Rightarrow\overrightarrow{OF}=-k\cdot\overrightarrow{OE}$ 1p

$\Rightarrow E,O,F\ coliniare$ 1p