CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ
„TEHNICI MATEMATICE”-editia a XVIII-a
Etapa judeteană 10.02.2023
Clasa a IX -a Matematică *M_șt-nat*

Barem de corectare și notare

Subiectul I (30p)

Fie $[x]$ partea întreagă a numărului real x și $\{x\}$ partea sa fracționară.

a) Dacă $[x] = 5$, determinați numărul real $\frac{1}{x}$.

b) Calculați $[\sqrt{2023}] - 6 \cdot \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

c) Determinați toate numerele reale x pentru care $\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{5}{x}\right] = 6$.

Barem de corectare și notare

a) $[x] = 5 \implies x \in [5; 6)$..5p

$\implies \frac{1}{x} \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right]$..5p

b) $1936 = 44^2 < 2023 < 2025 = 45^2 \implies \sqrt{2023} \in (44,\ 45)$ ....2p.

$[\sqrt{2023}] = 44$..2p

$\left\{-\frac{2}{3}\right\} = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$..2p

$[\sqrt{2023}] - 6 \cdot \left\{-\frac{2}{3}\right\} = 44 - 6 \cdot \frac{1}{3} = 44 - 2 = 42$..4p

c) Notăm $\frac{1}{x} = y \implies [y] + [5y] = 6$..1p

Avem cazurile:

i) Dacă $y < 0 \implies [y] + [5y] < 0 \implies [y] + [5y] \neq 6 \implies y \geq 0$..2p

ii) Dacă $y < 1 \implies [y] + [5y] < y + 5y = 6y < 6 \implies y \geq 1$..2p

iii) Dacă $y \geq \frac{6}{5} \implies 5y \geq 6 \implies [y] + [5y] \geq 1 + 6 = 7 \implies y < \frac{6}{5}$..2p

Din $\begin{cases} y \geq 1 \\ y < \frac{6}{5} \end{cases} \implies y \in \left[1, \frac{6}{5}\right) \implies [y] = 1$ și $5y \in [5, 6)$

$\implies \left.\begin{matrix} [5y] = 5 \\ [y] = 1 \end{matrix}\right\} \implies [y] + [5y] = 6$..2p

Concluzie: $1 \leq y < \frac{6}{5} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{x} < \frac{6}{5} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{6}, 1\right]$..1p

Subiectul II (30p)

a) Să se rezolve în $\mathbf{R}$ ecuația

$$|x - 1| + |2 - 2x| + |3x - 3| + \cdots + |9x - 9| + |10 - 10x| = |x^2 - 1|.$$

b) Dacă $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ astfel încât $a^2 + 7b^2 = 2$ și $c^2 + 5d^2 = 3$ să se demonstreze că $|abcd| < \frac{3}{10}$.

c) Să se demonstreze inegalitatea: $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} \leq \sqrt{4 - (x + y)^2}$

Barem de corectare și notare

a) $|x - 1| + |2x - 2| + |3x - 3| + \cdots + |9x - 9| + |10x - 10| = |x^2 - 1|$..1p

$\Leftrightarrow |x - 1| + 2|x - 1| + 3|x - 1| + \cdots + 9|x - 1| + 10|x - 1| = |(x - 1)(x + 1)|$.........1p

$\Leftrightarrow |x - 1| \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 10) = |x - 1| \cdot |x + 1|$..2p

$\Leftrightarrow 55 \cdot |x - 1| - |x - 1| \cdot |x + 1| = 0$..2p

$\Leftrightarrow |x - 1| \cdot (55 - |x + 1|) = 0$

i) $|x - 1| = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$..1p

ii) $|x + 1| = 55 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 55 \Leftrightarrow x = -56$ sau $x = 54$.. 2p

$S = \{-56, 1, 54\}$..1p

b) Aplicăm inegalitatea mediilor

$\sqrt{a^2 \cdot 7b^2} \leq \frac{a^2+7b^2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{7}|ab| \leq 1$ (1)......2p

$\sqrt{c^2 \cdot 5d^2} \leq \frac{c^2+5d^2}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{5}|cd| \leq \frac{3}{2}$ (2)......2p

$\xRightarrow{(1)\ \text{și}\ (2)} \sqrt{35}\,|abcd| \leq \frac{3}{2}$......1p

$\Leftrightarrow |abcd| \leq \frac{3}{2\sqrt{35}}$......1p

Dar $\frac{3}{2\sqrt{35}} < \frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{35}} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sqrt{35} > 5 \Leftrightarrow 35 > 25\ (A)$......4p

c) Din condițiile de existență $\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 & (1) \\ 1 - y^2 \geq 0 & (2) \\ 4 - (x+y)^2 \geq 0 & (3) \end{cases}$......2p

Din (1) și (2) obține $x \in [-1, 1]$ și $y \in [-1, 1]$ (D)......1p

Care verifică și condiția (3)......1p

$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \leq \sqrt{4-(x+y)^2}$ $\uparrow^2$

$\Leftrightarrow 1 - x^2 + 1 - y^2 + 2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \leq 4 - (x+y)^2$......1p

$\Leftrightarrow 2 - x^2 - y^2 + 2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \leq 4 - x^2 - 2xy - y^2$......1p

$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \leq 4 - 2xy$......1p

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \leq 1 - xy$ $\uparrow^2$ ($1 - xy \geq 0$ conform (D))......1p

Obținem $-x^2 - y^2 + 2xy \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$......1p

$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ cu egalitate pentru $x = y$......1p

Subiectul III (30p)

1. Se consideră triunghiul ABC cu AA', BB', CC' mediane.
   a) Să se arate că se poate forma un triunghi cu segmentele AA', BB', CC'.
   b) Dacă $M \in [BC]$ astfel încât $\frac{MB}{MC} = 2023$, atunci $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2024}\overrightarrow{AB} + \frac{2023}{2024}\overrightarrow{AC}$.

2. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AC \cap BD = \{O\}$ și E, F mijloacele laturilor BC respectiv AD. Arătați că dacă punctele *E*,*O*,*F* sunt coliniare atunci *BC*//*AD*.

Barem de corectare și notare

1.

a) Condiția necesară și suficientă este: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$......2p

$\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2} = \vec{0}$......3p

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$......3p

$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$ (A)......2p

b) $\frac{MB}{MC} = 2023 \Rightarrow MB = 2023 \cdot MC$......1p

$\Rightarrow \overrightarrow{MB} = -2023 \cdot \overrightarrow{MC}$......1p

Cum $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \end{cases} \mid (+) \Rightarrow$......1p

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \Rightarrow$......1p

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2023 \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MC} \Rightarrow$......1p

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2022 \cdot \overrightarrow{MC}$......1p

Dar $\frac{MB}{MC}=\frac{2023}{1} \Leftrightarrow \frac{BC}{MC}=\frac{2024}{1} \Longrightarrow$

$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2024}\,\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2024}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$..1p

Deci $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+2022\cdot\frac{1}{2024}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$...1p

$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{2022}{2024}\overrightarrow{BA}+\frac{2022}{2024}\overrightarrow{AC}$..1p

$2\overrightarrow{AM}=\frac{2}{2024}\overrightarrow{AB}+\frac{4046}{2024}\overrightarrow{AC} \quad |:2$

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2024}\overrightarrow{AB}+\frac{2023}{2024}\overrightarrow{AC}$..1p

2. Fie $\begin{cases}\frac{AO}{OC}=k\\ \frac{DO}{OB}=p\end{cases},\ k,p\in(0,\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AO}=k\cdot\overrightarrow{OC}\\ \overrightarrow{DO}=p\cdot\overrightarrow{OB}\end{cases}\quad(1)$ 2p

F este mijlocul segmentului $(AD)\Longrightarrow\overrightarrow{OF}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}}{2}$...2p

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}\overrightarrow{OF}=\frac{-k\cdot\overrightarrow{OC}-p\cdot\overrightarrow{OB}}{2}$...1p

Analog E este mijlocul segmentului $(BC)\Longrightarrow\overrightarrow{OE}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$..2p

E,O,F coliniare $\Longrightarrow$ vectorii $\overrightarrow{OF}$ și $\overrightarrow{OE}$ sunt coliniari..1p

$\Longrightarrow k=p\Longrightarrow\frac{AO}{OC}=\frac{DO}{OB}$..1p

$\Longrightarrow \Delta AOD\sim\Delta COB\Longrightarrow AD//BC$..1p